

LXVII олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 9 января 2020 года
XII класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В гимназии можно изучать три иностранных языка: английский, немецкий и французский. В гимназии 286 учеников и каждый ученик изучает хотя бы один иностранный язык. Причем, английский язык изучают 230 учеников, немецкий язык изучают 170 учеников и французский язык изучают 111 учеников. Как английский, так и немецкий изучают 132 ученика. Как немецкий, так и французский изучают 72 ученика, как французский, так и английский языки изучают 68 учеников. Сколько учеников изучают все три языка?
2. Найди значение выражения $\log_q x_1^2 + \log_q x_2^2 + \log_q a^2$, если x_1 и x_2 - это корни квадратного уравнения $ax^2 + px + q = 0$.
3. Хорда окружности $AB = 10$ см. Касательная к окружности проходит через точку A , а расстояние от точки B до этой касательной равно 3 см. Найди радиус окружности.
4. Найди наименьшее натуральное число n , при котором произведение $(n)(n + 3)(n + 5)$ делится нацело на число 2020.
5. Томас играет в игру. Перед ним клетчатое поле, размеры которого 3×5 , и у него в кармане бесконечно много золотых монет. Его задание состоит в том, чтобы расположить на клетчатом поле шишки, соблюдая при этом следующие правила:
 - Томас может купить у торговца шишки, расплачиваясь золотыми монетами. Первая шишка стоит 10 золотых монет, а каждая следующая шишка на 10 золотых монет дороже предыдущей.
 - Купленную шишку можно расположить только в пустой клетке.
 - Если на клетчатом поле найдется две клетки, которые заполнены одинаковым количеством шишек, то разрешено в одной из клеток увеличить количество шишек на одну. Однако, все шишки из другой клетки нужно вернуть торговцу.
 - На одну клетку помещается максимально шесть шишек.
 - а) Каково наименьшее количество золотых монет, которые потребуются Томасу для расстановки на клетчатом поле 31 шишки?
 - б) Каково наибольшее количество шишек, которые должен купить Томас, чтобы на клетчатом поле оказалось 48 шишек?